MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE
UNIVERSITATEA "LUCIAN BLAGA" DIN SIBIU
FACULTATEA DE ŞTIINŢE
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul Naţional Studenţesc de Matematică
"Traian Lalescu"
Ediţia a IX-a, Sibiu, 19-21 mai 2016

Soluţii şi barem de corectare la secţiunea A

1. *Găsiţi numerele întregi x cu proprietatea că $x^{2016}+x^{2015}+\cdots+x+1$ se divide prin* 2017.
Soluţie:
Pentru orice număr prim p, scriind în $\mathbb{Z}_p[X]$, avem:

$$(X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+X+1)(X-1)=X^p-1=(X-1)^p\,, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(3p)}$$

astfel că

$$X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+X+1=(X-1)^{p-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(1p)}$$

Aşadar, polinomul $X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+X+1\in\mathbb{Z}_p[X]$ are doar rădăcina 1 .... **(2p)**,
deci congruenţa $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1\equiv 0 \pmod p$ are unica soluţie $x\equiv 1 \pmod p$). **(1p)**.
Prin urmare, numerele întregi x pentru care p divide $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ sunt exact numerele de forma $\mathcal{M}p+1$ .... **(1p)**.
Cum 2017 este un număr prim, numerele cerute sunt cele din mulţimea $2017\,\mathbb{Z}+1$ .... **(2p)**.

2. *Calculaţi*

$$\lim_{h\searrow 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{1+n^2h^2}\,.$$

Soluţie:
Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $h>0$ au loc inegalităţile

$$\frac{h}{1+(n+1)^2h^2}<\int_n^{n+1}\frac{h}{1+x^2h^2}\,dx<\frac{1}{1+n^2h^2}\,, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(2p)}$$

astfel că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2h^2}-\frac{h}{1+h^2}<\int_1^{\infty}\frac{h}{1+x^2h^2}\,dx<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2h^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(2p)}$$

Cum

$$\int_1^{\infty}\frac{h}{1+x^2h^2}\,dx=\arctan(xh)\,\Big|_1^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\arctan(h)\,, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(2p)}$$

rezultă că

$$\frac{\pi}{2}-\arctan(h)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2h^2}<\frac{\pi}{2}-\arctan(h)+\frac{h}{1+h^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(3p)}$$

Trecând la limită pentru $h \searrow 0$, obţinem că

$$\lim_{h\searrow 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{1+n^2h^2}=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{(1p)}$$

3. *Considerăm subcorpul $K=\{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}$ al corpului cuaternionilor. Arătaţi că:*
a) Ordinul oricărui subgrup finit al lui $(K\setminus\{0\},\cdot)$ este de forma $2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$, cu $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.
b) Orice subgrup comutativ finit al lui $(K\setminus\{0\},\cdot)$ are ordin 1, 2, 3, 4 sau 6.
Soluţie:
Începem cu câteva observaţii calculatorii:
Dacă considerăm elementele $x=a+bi+cj+dk$ şi $x'=a'+b'i=c'j+d'k$ ale lui K, avem

$$xx'=aa'-bb'-cc'-dd'+(ab'+ba'+cd'-dc')i+(ac'-bd'+ca'+db')j+(ad'+bc'-cb'+da')k.$$

Notând $\overline{x}=a-bi-cj-dk$, obţinem $x\overline{x}=a^2+b^2+c^2+d^2\in\mathbb{Q}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(0,5p)**.
Notând $E=bi+cj+dk$ (şi $E'=b'i+c'j+d'k$), avem pe de o parte

$$x^2=a^2-b^2-c^2-d^2+2aE=2ax-x\overline{x},(\mathbf{0,5p})$$

iar pe de altă parte x şi x' comută dacă şi numai dacă E şi E' sunt $\mathbb{Q}$-liniar dependente**(0,5p)**.
a) Fie H un subgrup finit al grupului multiplicativ $G=K\setminus\{0\}$ şi p un divizor prim al ordinului lui H. Conform teoremei lui Cauchy, există un element $x\in H$ de ordin p. Cum $x^p=1\neq x$, rezultă că x, ca element al subcorpului comutativ $L=\{a+bx \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, este rădăcină a polinomului ireductibil $f=X^{p-1}+X^{p-2}+\cdots+X+1\in\mathbb{Q}[X]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(0,5p)**.
Pe de altă parte, cu notaţiile folosite mai sus, $x^2-2ax+x\overline{x}=0$, astfel că x este rădăcină a polinomului $g=X^2-2aX+x\overline{x}\in\mathbb{Q}[X]$. Cum f este ireductibil, rezultă că $f|g\ldots$ **(0,5p)**, de unde obţinem că $p=1+grad(f)\leq 1+grad(g)=3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(0,5p)**.
Prin urmare $|H|$ este de forma $2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$, cu $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.
b) Considerăm un element $x\in G$ de ordin finit n. Cu aceeaşi notaţie $x=a+E$, folosită mai sus, avem că

$$x^n=(a+E)^n=\sum_{0\leq 2k\leq n}C_n^{2k}a^{n-2k}E^{2k}+\left(\sum_{0\leq 2k+1\leq n}C_n^{2k+1}a^{n-2k-1}E^{2k}\right)\cdot E\,.$$

Notând $T=\sqrt{b^2+c^2+d^2}$, avem că $E^2=-T^2$, deci

$$x^n=\sum_{0\leq 2k\leq n}C_n^{2k}a^{n-2k}(-T^2)^k+\left(\sum_{0\leq 2k+1\leq n}C_n^{2k+1}a^{n-2k-1}(-T^2)^k\right)\cdot E=$$

$$=\sum_{0\leq 2k\leq n}C_n^{2k}a^{n-2k}(iT)^{2k}+\left(\sum_{0\leq 2k+1\leq n}C_n^{2k+1}a^{n-2k-1}(iT)^{2k}\right)\cdot E=$$

$$=\frac{(a+iT)^n+(a-iT)^n}{2}+\frac{(a+iT)^n-(a-iT)^n}{2}\cdot E\,.\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{(2p)}$$

Prin urmare, condiţia $x^n = 1$ este echivalentă cu

$$\begin{cases} (a+iT)^n = (a-iT)^n \\ (a+iT)^n + (a-iT)^n = 2\,, \end{cases}$$

adică cu $(a+iT)^n = (a-iT)^n = 1$. Cum ordinul lui x este n, există $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, prim cu n, astfel încât $a = \cos\frac{2k\pi}{n}$ şi $T = \sin\frac{2k\pi}{n}$ .... **(1p)**.
Deoarece $a \in \mathbb{Q}$, rezultă că $a \in \{-1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ .... **(1p)**.
Considerăm acum un subgrup comutativ H al lui G.
Dacă $H = \{1\}$, atunci $|H| = 1$, iar dacă $H = \{-1, 1\}$, atunci $|H| = 2$.
Dacă $H \not\subseteq \{-1, 1\}$, fie $x = a + E \in H \setminus \{-1, 1\}$ şi $x' = a' + E' \in H$. Deoarece x şi x' comută, există $\lambda \in \mathbb{Q}$ cu $E' = \lambda \cdot E$ sau există $\lambda' \in \mathbb{Q}$ cu $E = \lambda' \cdot E'$.
(I) Dacă $a = a' = 0$, atunci $T^2 = T'^2 = 1$, deci $E^2 = E'^2 = -1$. Dacă $E' = \lambda \cdot E$, atunci $-1 = E'^2 = \lambda^2 E^2 = -\lambda^2$, astfel că $\lambda = \pm 1$ şi $x' = \pm x$. Cazul $E = \lambda' \cdot E'$ conduce similar la aceeaşi concluzie. Cum $x^2 = E^2 = -1$, avem că $x^3 = -x$, astfel că $x' \in \langle x \rangle$. Atunci $H = \langle x \rangle$ şi obţinem că $|H| = 4$ .... **(0,5p)**.
(II) Dacă $a = 0$ şi $a' = \pm\frac{1}{2}$, atunci $T^2 = 1$, $T'^2 = \frac{3}{4}$, $E^2 = -1$ şi $E'^2 = -\frac{3}{4}$. Ca mai sus obţinem că $\lambda^2 = \frac{3}{4}$ sau $\lambda'^2 = \frac{4}{3}$. Acestea nu sunt însă pătratele unor numere raţionale, contradicţie **(0,5p)**.
(III) Dacă $a = 0$ şi $a' = \pm 1$, atunci $T^2 = 1$, $T'^2 = 0$, $E^2 = -1$, $E'^2 = 0$, deci $x' = \pm 1$. Cum $x^2 = -1$ şi $x^4 = 1$, rezultă că $x' \in \langle x \rangle$. Obţinem ca la (I) că $H = \langle x \rangle$ şi $|H| = 4$ .... **(0,5p)**.
(IV) Dacă $a = \pm\frac{1}{2}$ şi $a' = \pm\frac{1}{2}$, atunci $T^2 = T'^2 = \frac{3}{4}$, $E^2 = E'^2 = -\frac{3}{4}$ şi dacă $E' = \lambda \cdot E$ sau $E = \lambda' \cdot E'$, obţinem $\lambda = \pm 1$(sau $\lambda' = \pm 1$) şi $x' \in \{x, -x, \overline{x}, -\overline{x}\}$. Din $x = \pm\frac{1}{2} + E$, avem atunci $x^2 = -\frac{1}{2} \pm E = \mp\overline{x}$ şi $x^3 = \pm 1$.
Dacă $x^3 = -1$, atunci $x^4 = -x$, $x^5 = -x^2$, $x^6 = 1$.
Obţinem că $H = \langle x \rangle$ sau $H = \langle x, -x \rangle$ şi $|H| \in \{3, 6\}$ .... **(0,5p)**.
(V) Dacă $a = \pm\frac{1}{2}$ şi $a' = \pm 1$, atunci $T^2 = \frac{3}{4}$, $T'^2 = 0$, $E^2 = -\frac{3}{4}$, $E'^2 = 0$. Rezultă că $x' = \pm 1$ şi obţinem ca la (IV) că $|H| \in \{3, 6\}$ .... **(0,5p)**.
(VI) Dacă $a = \pm 1$ şi $a' = \pm 1$, atunci $H \subseteq \{-1, 1\}$ şi $|H| \in \{1, 2\}$ .... **(0,5p)**.
Celelalte cazuri se pot obţine din cele de mai sus interschimbând valorile a şi a'.

4. *Considerăm şirul de discuri $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, discul D_n având raza $\frac{1}{n}$. Determinaţi latura minimă a unui pătrat în care pot fi amplasate fără suprapuneri toate discurile D_n, $n \in \mathbb{N}^*$.*
Soluţie:

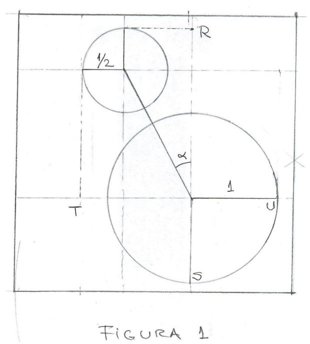

FIGURA 1

Remarcăm pentru început că dacă D_1 şi D_2 se află în interiorul unui pătrat de latură L, iar linia centrelor face un unghi α cu una din laturi, atunci, conform Figurii 1, $L \geq RS \geq \frac{3}{2}(1+\cos\alpha)$ şi $L \geq TU \geq \frac{3}{2}(1+\sin\alpha)$, deci

$$L \geq \frac{3}{2}(1+\max\{\sin\alpha,\cos\alpha\}) \geq \frac{3}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3(2+\sqrt{2})}{4}$$

(aceasă valoare putând fi atinsă doar pentru $\alpha = 45^0$). Vom arăta că aceasta e valoarea minimă cerută .... **(3p)**, scop în care dispunem discurile într-un pătrat de latură $l = \frac{3(2+\sqrt{2})}{4}$ ca în Figura 2.

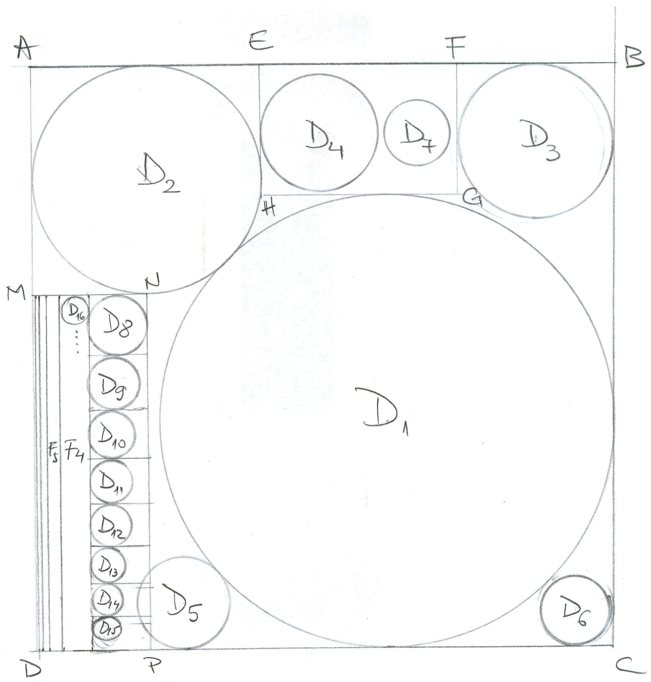

FIGURA 2

Pentru a valida această configuraţie, avem de probat următoarele afirmaţii:

1) Că D_3 ,,încape” în colţul din ,,dreapta-sus” . . . . **(1p)**
2) Că D_6 ,,încape” în colţul din ,,dreapta-jos” . . . . **(1p)**
3) Că între D_2, D_1, AD şi CD ,,încape” un dreptunghi $MNPD$ de laturi $\frac{1}{2}$ şi $l-1$ . . . . . **(1p)**.
4) Că D_4 şi D_7 ,,încap” între D_2, D_1, D_3 şi AB . . . . **(1p)**
5) Că D_8, D_9, . . . ,,încap” în Int$MNPD \setminus D_5$, unde $MNPD$ e dreptunghiul de la punctul 3)**(3p)**

Abordăm pe rând aceste cazuri:

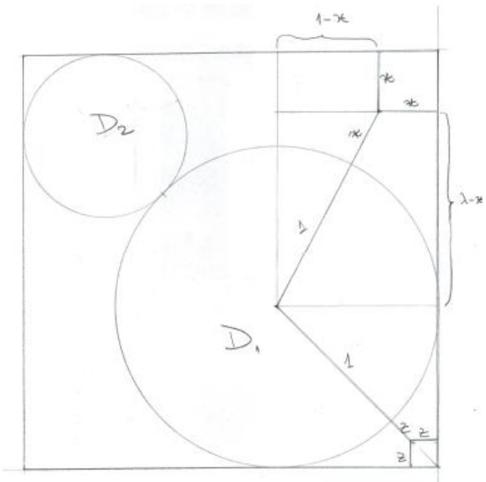

FIGURA 3

1) Notăm $\lambda = l - 1$; cu notaţiile din Figura 3 avem:

$$(1+x)^2 = (1-x)^2 + (\lambda - x)^2, \text{adică}$$

$$2x + x^2 = -2x + x^2 + (\lambda - x)^2, \text{ sau}$$

$$(\lambda - x)^2 - 4x = 0. \tag{1}$$

Noi dorim să arătăm că $x \geq \frac{1}{3}$; ţinând cont de faptul că ecuaţia (1) are produsul rădăcinilor egal cu $\lambda^2 > 1$, x, care este subunitar, trebuie să fie rădăcina ,,mică” a respectivei ecuaţii. Este deci suficient pentru a găsi $x \geq \frac{1}{3}$ să dovedim că $\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} > 0$, adică $\frac{2+3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3} > \frac{2}{\sqrt{3}}$, sau, altfel scris, $8\sqrt{3} - 9\sqrt{2} < 2$.
Această ultimă relaţie este însă adevărată întrucât $8\sqrt{3} - 9\sqrt{2} < 8 \cdot 1,8 - 9 \cdot 1,4 = 14,4 - 12,6 < 2$, deci afirmaţia 1) este justificată.
2) Tot pe Figura 3 vedem că $1 + z + z\sqrt{2} = \sqrt{2}$, de unde $z = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} > 3 - 2 \cdot 1,1415 = 0,17 > \frac{1}{6}$.
3) Avem $l - 2 = \frac{3\sqrt{2}-2}{4} > \frac{3 \cdot 1,4 - 2}{4} > \frac{1}{2}$; afirmaţia referitoare la lungimea lui $MNPD$ este imediată.
4) Avem $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) = 2\left(\frac{3}{4} + \frac{10}{21}\right) < \frac{5}{2}$.
Pe de altă parte, $l = \frac{3(2+\sqrt{2})}{4} > \frac{3 \cdot 3,4}{4} = \frac{5,1}{2}$.
Prin urmare, $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) < l$. Consecutiv, dreptunghiul $EFGH$ din Figura 2 are lungimea mai mare decât $2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right)$ şi (conform cazului 3)) lăţimea mai mare decât $\frac{1}{2}$, deci D_4 şi D_7 ,,încap” în el.
5) Divizăm $MNPD$ în fâşii verticale, notate de la dreapta la stânga $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4, \ldots$ şi astfel încât $\mathcal{F}_k$ să aibă lăţimea $\frac{1}{2^{k-1}}$ (a se vedea, din nou, Figura 2). Fie funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.
Avem $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} < 0$, deci f e strict descrescătoare. Prin urmare, $f(2^k) \leq f(8)$ pentru orice $k \geq 3$. Consecutiv, pentru orice $k \geq 3$ avem $f(2^k) \leq f(8) = \sum\limits_{j=8}^{15} \frac{1}{j} < 0,728$. Prin urmare, suma diametrelor discurilor D_{2^k}, $D_{2^k+1}, \ldots, D_{2^{k+1}-1}$ este mai mică decât 1,456, ceea ce arată că putem amplasa toate aceste discuri în $\mathcal{F}_k$. Pentru a gestiona ulterior

interacţiunea cu D_5, vom pune aceste discuri astfel încât razele să descrească ,,de sus în jos", ele să fie tangente la latura din stânga a fâşiei, şi alocând fiecărui D_n o porţiune de înălţime $\frac{2}{n}$ a fâşiei corespunzătoare.
Discul D_5 din Figura 2 are o porţiune comună cu $MNPD$. Aceasta nu va constiutui însă o problemă dacă vom arăta că D_5, fiind tangent la D_1 şi DC, nu poate să intersecteze niciunul din discurile D_8, D_9,... D_{15} dispuse în $\mathcal{F}_3$ conform ideilor de mai sus.
Întrucât $\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} > \frac{1}{5}$, discurile D_8, ..., D_{12} se găsesc în întregime deasupra tangentei orizontale la D_5, diferită de DC.
Prin urmare, este suficient să arătăm că distanţa d dintre AD şi tangenta verticală la D_5 care nu taie D_1 este mai mare decât $\frac{1}{4} + \frac{2}{13}$.

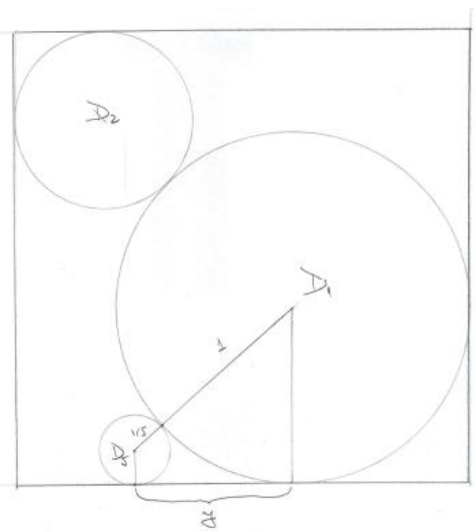

FIGURA 4

Dar, cu notaţiile din Figura 4, $y^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$, deci $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Prin urmare, $d = l - \frac{6+2\sqrt{5}}{5}$, iar

$$d - \frac{1}{4} = \frac{1 + 15\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{20} > \frac{4,314}{20} > \frac{2}{9} > \frac{2}{13}. \qquad \square$$